

Chuck-a-luck – ein enaktiver Zugang zur Einführung in die Wahrscheinlichkeitslehre und Simulation mit dem CASIO fx-CG20

1. Vorüberlegungen

Die Wahrscheinlichkeitslehre bereitet vielen Schülern¹ in der Mittel- und Oberstufe Unbehagen. Sie ist nicht intuitiv und man kann – bei falscher Modellierung – sehr schnell in die Irre geführt werden. Der Realitätsbezug, die Relevanz und die Sinnhaftigkeit einer mathematischen Modellierung müssen gerade bei einführenden Beispielen gewährleistet sein. Es ist wichtig, entsprechende mathematische Modelle in der Realität durch Simulationen (händisch und mithilfe digitaler Werkzeuge) zu überprüfen (validieren). Aus der Simulation ergibt sich die Wahrscheinlichkeit als Schätzwert relativer Häufigkeiten (frequentistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff). Die Einführung in die Wahrscheinlichkeitslehre mithilfe des klassischen Werfens einer Münze und des Beobachtens eines Ereignisses, z. B. „Es fällt Kopf“ oder des Würfeln mit einem Spielwürfel und des Beobachtens des Ereignisses „Es fällt die Augenzahl 6“ ist für die Schüler weder (alltäglich) relevant, spannend, noch neu. Andere Zufallsexperimente bieten sich für einen Einstieg eher an. Der hier vorgestellte Einstieg über das Würfelspiel „Chuck-a-luck“ bietet Gelegenheit, Aussagen über Chancen, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten zu diskutieren, (Fehl-)Vorstellungen zu thematisieren, über die Begriffe „Zufall“, „Wahrscheinlichkeit“, „absolute Häufigkeit“, „relative Häufigkeit“, „fair“ zu sprechen und mathematische Modelle zu konstruieren. Dieses Arbeitsblatt ist Teil einer Lerntheke² zur Einführung in die Wahrscheinlichkeitslehre in Klassenstufe 7.

2. Das Spiel „Chuck-a-luck“

Chuck-a-luck ist ein in den Casinos der USA tatsächlich vorkommendes Würfelspiel. Wie bei jedem Würfelspiel in Casinos ist daher die Wahrscheinlichkeit, dass die Casino-Betreiber hiermit einen Gewinn machen, größer als die, dass die Spieler gewinnen. Eine grundlegende Wahrheit, die vielen Schülern nicht bewusst ist oder sie nicht glauben wollen.

¹ Der Einfachheit halber wird im Folgenden nur die männliche Form verwendet.

² Das Prinzip einer Lerntheke besteht darin, dass man den Schülern aus einer Vielzahl von verschiedenen Aufgaben oder Aufgabenblättern die Wahl lässt, eines oder zwei auszuwählen und in einer bestimmten Sozialform zu bearbeiten. Die Aufgaben können dabei zielgleich oder –different sein und auch unterschiedliche Anforderungsniveaus aufweisen. Die Aufgaben (gegebenenfalls mit Hilfe und Lösungsskizze) werden in einer bestimmten Anzahl vervielfältigt (3 – 4 Kopien) und auf einer Tischreihe (Theke) ausgelegt. Die Bearbeitung erfolgt dann an zuvor festgelegten Tischgruppen. Die Bearbeitungsdauer beträgt in der Regel eine Doppelstunde und die Ergebnissicherung ausgewählter Aufgaben erfolgt im Plenum durch Präsentation in einer Einfach- oder Doppelstunde.

Chuck-a-luck

Material: Drei Spielwürfel, Zahlungsmittel (Wendeplättchen)

Chuck-a-luck ist ein Würfelspiel, das häufig in Casinos gespielt wird. Ein Spieler setzt einen Betrag und nennt eine Augenzahl. Dann wird gewürfelt.

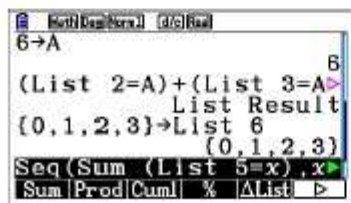
- Wenn die Augenzahl einmal erscheint, dann erhält der Spieler den einfachen Einsatz als Gewinn.
- Wenn die Augenzahl zweimal erscheint, dann erhält der Spieler den doppelten Einsatz als Gewinn und
- wenn sie dreimal erscheint, dann den dreifachen Einsatz als Gewinn.

Ansonsten verliert der Spieler seinen Einsatz

- Führe das Spiel 20-mal durch. Tippe einmal auf eine Zahl, Stelle graphisch dar, wie oft die Augenzahl gefallen ist.
- Ist das Spiel fair?
- Simuliere den Vorgang mit dem GTR für 200 Durchführungen und stelle die relativen Häufigkeiten graphisch dar.

Hilfen:

- Speichere die Zufallszahlen für jeden einzelnen Würfel in separaten Listen ab. Du kannst die getippte Zahl in einer Variablen A zwischenspeichern. Die Anzahl der Treffer ergibt sich als Summe der Listen.



- Info Simulation Würfelwurf mit dem GTR

Beim Chuck-a-luck werden drei normale Spielwürfel benötigt. Der Spieler macht seinen Einsatz, nennt eine Augenzahl und die Würfel werden (von einem Casinomitruarbeiter) geworfen. Wenn die genannte Augenzahl nicht erscheint, geht der Einsatz an die Bank (das Casino). Erscheint die genannte Augenzahl bei einem Würfel, erhält der Spieler den einfachen Einsatz als Gewinn. Erscheint die genannte Augenzahl bei zwei Würfeln, erhält der Spieler den doppelten Einsatz und bei allen drei Würfeln den dreifachen Einsatz als Gewinn.

Bei einem Einsatz von k Euro erhält man für die Zufallsvariable X : „Gewinn in Euro“ die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung³

X	$-k$	k	$2k$	$3k$
$P(X)$	0.5787	0.3472	0.0694	0.0046

³ Die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten erfolgt über die Binomialverteilung mit den Parametern $n = 3$ und $p = 1/6$.

In 57,9% aller Fälle verliert der Spieler also seinen Einsatz. Für den Erwartungswert ergibt sich daher: $E(X) = k(-0.5787 + 0.3472 + 2 \cdot 0.0694 + 3 \cdot 0.0046) = -0.0789k$. Ein gutes Spiel für das Casino; ein schlechtes Spiel für den Spieler und damit nicht fair.

Didaktisch-methodischer Kommentar

Das Arbeitsblatt ist relativ kurz formuliert und verzichtet bewusst auf eine sprachliche Präzisierung der Begriffe „Wahrscheinlichkeit“, „Chance“, „Häufigkeit“, „fair“. Erfahrungsgemäß haben Schüler eine intuitive Grundvorstellung der Begriffe, die hier aufgegriffen und diskutiert werden können. Auch auf die mathematische Präzisierung der Begriffe „Ergebnis“ und „Ereignis“ sowie die Darstellung in einem Baumdiagramm wird verzichtet, weil das Arbeitsblatt (lediglich) Anlass für eine mathematische Modellierung und eine Diskussion sein soll.

Auf die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten im Unterricht mithilfe der Binomialverteilung muss in dieser Klassenstufe verzichtet werden. Die Wahrscheinlichkeiten könnten mithilfe eines reduzierten Baumdiagramms ermittelt werden; diese Vorgehensweise macht aber als Einführung keinen Sinn. Wenn (mindestens) drei Gruppen dieses Arbeitsblatt bearbeiten und ihre Ergebnisse in einer Tabelle zusammenfassend dargestellt werden, liefern die relativen Häufigkeiten gute Näherungen für die Wahrscheinlichkeiten.

Beim 20-fachen Würfeln haben verschiedene Schülergruppen folgende Ergebnisse für die Häufigkeit der Anzahl der Würfel mit der genannten Augenzahl erhalten:

Anzahl der Treffer		0	1	2	3
Absolute Häufigkeiten	Gruppe 1	11	8	1	0
	Gruppe 2	9	9	2	0
	Gruppe 3	12	6	1	1
Relative Häufigkeit		$\frac{32}{60} = 0.533$	$\frac{23}{60} = 0.383$	$\frac{4}{60} = 0.067$	$\frac{1}{60} = 0.017$

Anhand der Tabelle und der Ergebnisse kann erarbeitet werden, dass zur Beschreibung der Chancen und der Fairness die absoluten Häufigkeiten keine große Hilfe sind. Die relativen Häufigkeiten, also der Bezug der absoluten Häufigkeiten auf die Anzahl der Durchführungen ist relevant und aussagekräftig. Die Erfahrung lehrt, dass sich mit zunehmender Anzahl der Durchführungen die relativen Häufigkeiten stabilisieren, also weniger schwanken, wohingegen die absoluten Häufigkeiten immer weiter zunehmen (empirisches Gesetz der großen Zahlen oder besser: empirisches Gesetz der Stabilisierung der relativen Häufigkeiten).

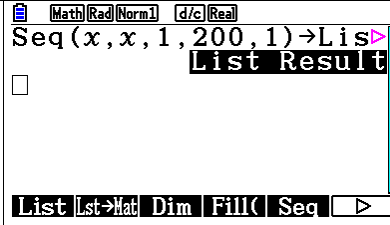
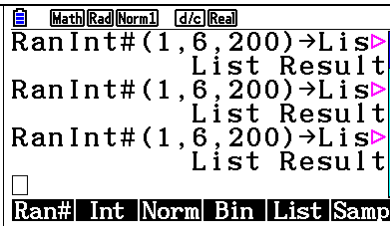
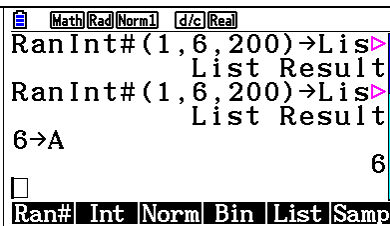
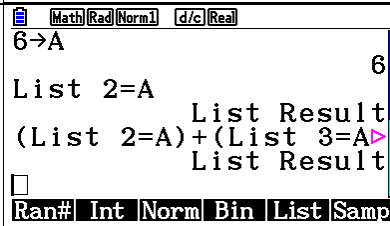
Aufgrund der relativen Häufigkeiten wird ziemlich schnell deutlich, dass das Spiel nicht fair ist. Die Berechnung des Erwartungswertes als Maß für die Fairness erfolgt, indem konkrete Beträge eingesetzt werden (z. B. 1, 10, 100 Euro pro Spiel). Schnell wird deutlich, dass ein Spieler im Mittel bzw. auf lange Sicht verliert. Man erwartet also einen Verlust von 7.89% des Einsatzes. Das hört sich nicht viel an, ist aber aufgrund der Vielzahl der Spieler und der Spiele durchaus ein stattlicher Gewinn für

das Casino. „Fair“ bedeutet für die Schüler in diesem Zusammenhang, dass man genauso häufig verliert, wie man gewinnt bzw. dass man seinen Einsatz Null auf Null zurückbekommt.

Um genauere Werte für die relativen Häufigkeiten bzw. für den Erwartungswert zu ermitteln, bietet sich die Simulation mithilfe des GTR und anschließender Mittelwertbildung an.

Die im Folgenden beschriebene Vorgehensweise bietet sich bei sehr vielen Simulationsvorgängen an.

3. Einsatz des CASIO fx-CG20 als Simulationswerkzeug und zur grafischen Darstellung

	<p>Schritt 1: Liste von 200 Zahlen erzeugen</p> <p>Um eine Simulation des Spiels zu erzeugen, bietet sich der Weg über Listen an. Hierzu erstellt man im Run-Matrix-Menü⁴ mithilfe des Seq-Befehls (Syntax: Seq(Vorschrift, Laufvariable, Startwert, Endwert, Schrittweite) zunächst eine Liste der Zahlen von 1 bis 200 und speichert diese mithilfe der Taste \rightarrow unter dem Namen List 1 ab.</p> <p>OPTN F1 F5 (Seq) \rightarrow X,θ,T \rightarrow X,θ,T \rightarrow 1 \rightarrow 200 \rightarrow 1 \rightarrow → \rightarrow SHIFT 1 (List) 1 EXE EXIT</p>
	<p>Schritt 2: drei Würfel simulieren</p> <p>Im Anschluss muss zunächst eine Liste List 2 mit 200 ganzzahligen Zufallszahlen von 1 bis 6 erzeugt werden, die die einzelnen unabhängigen Würfelergebnisse des 1. Würfels wiedergeben.</p> <p>OPTN F6 F3 (Prob) F4 (RAND) F2 (Int) 1 \rightarrow 6 \rightarrow \rightarrow 200 \rightarrow → \rightarrow SHIFT 1 (List) 2 EXE EXIT ∇</p> <p>Man wiederholt diesen Vorgang für die anderen beiden Würfel und speichert die Zufallszahlen in List 3 bzw. List 4 ab.</p>
	<p>Schritt 3: Zahl tippen</p> <p>Der Einfachheit halber soll untersucht werden, wie oft die Zahl 6 bei jeder der 200 Simulationen erscheint. Wir speichern die Zahl 6 unter der Variablen A ab.</p>
	<p>Schritt 4: Anzahl der Treffer bestimmen</p> <p>Es muss überprüft werden, ob die Zahl A in der Liste List 2 vorkommt. Dies geschieht durch Vergleich der einzelnen Werte von Liste List 2 mit A (Syntax: List 2=A). Dieser Vergleich liefert eine Liste von 0 und 1. Das Zählen der Treffer bei drei Würfeln erfolgt durch Addition der drei Vergleiche mit den Listen und</p>

⁴ Es wäre auch möglich, die Listen direkt im Statistics-Menü zu erzeugen.

--

The TI-84 Plus calculator screen displays the following sequence of operations:

- Mode: **Math** (selected), Rad, Norm1, d/c, Real
- Input: $\{0,1,2,3\} \rightarrow \text{List } 6$
- Result: $\{0,1,2,3\}$
- Input: **Sum (List 5=0)**
- Result: **116**
- Input: **Seq(Sum (List 5=x), x, {116,73,9,2})**
- Result: $\{116,73,9,2\}$
- Bottom status bar: **Sum** (selected), Prod, Cum1, %, Δ List, and a right arrow.

TI-84 Plus calculator screen showing list statistics. The screen displays the following text:

- Sum (List 5=0)
- 116
- Seq(Sum (List 5=x),x{116,73,9,2}
- List 7÷Dim List 1→Li{0.58,0.365,0.045,0.
- List List→Mat Dim Fill(Seq

The calculator screen displays the following information:

- Mode: **Math** (selected), **Rad**, **Norm1**, **d/c**, **Real**
- Sum (List 5=0)
- Seq(Sum (List 5=x), x) 107
- {107, 72, 21, 0}
- List 7 ÷ Dim List 1 → Li 107
- {0.535, 0.36, 0.105, 0}
- Navigation buttons: **TOP**, **BOTTOM**, **PageUp**, **PageDown**

	List 5	List 6	List 7	List 8
SUB				
1	0	0	116	0.58
2	0	1	73	0.365
3	0	2	9	0.045
4	1	3	2	0.01

GRAPH CALC TEST INTR DIST ►

StatGraph1

Graph Type : Hist

XList : List6

Frequency : List8

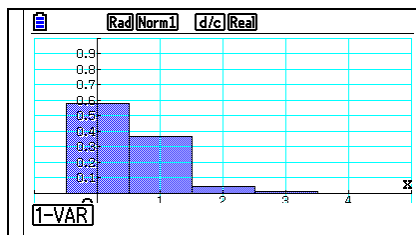
Color Link : Off

Hist Area : Blue/L

HistBorder : Black

1 LIST

Stellen Sie gegebenenfalls das Grafikfenster im x-Intervall von -1 bis 5 und im y-Intervall von -0.2 bis 1 dar.



Mithilfe der *Trace*-Funktion (**SHIFT** **F1**) können Sie die relativen Häufigkeiten aus dem Histogramm ablesen.

Die drei Gruppen haben mithilfe der Simulation folgende Ergebnisse erhalten:

Anzahl der Treffer		0	1	2	3
Relative Häufigkeit	Gruppe 1	0.555	0.375	0.045	0.025
	Gruppe 2	0.54	0.4	0.06	0
	Gruppe 3	0.65	0.305	0.045	0
	Mittelwert	0.582	0.36	0.05	0.008

4. Aufgetretene Schwierigkeiten

- Etliche Schüler meinten, dass die Chancen für „Es erscheint dreimal die Augenzahl 6“ und „Es erscheint dreimal die Augenzahl 2“ unterschiedlich sind.
- Auch tendierten viele Schüler dahin, bei jedem Spiel die Augenzahl zu wechseln. Es war nicht klar, dass es gleichgültig ist, welche Augenzahl genannt wird und man daher bei einer festen, aber beliebigen Augenzahl verbleiben kann.
- Es wurde bei Verlust von Plättchen versucht, diese durch riskantes Spiel wiederzugewinnen. Im nächsten Spiel haben sie entsprechend mehr Plättchen eingesetzt.
- Die Schüler freuten sich riesig, wenn die genannte Augenzahl bei mindestens einem Würfel erscheint und meinten dann, auf der Gewinnerstraße zu sein. Es hat der „Blick in die Zukunft“ bzw. auf lange Sicht gefehlt.
- Die Bedeutung des Mittelwertbegriffs „im Mittel“ hat einigen Schülern Schwierigkeiten verursacht. Die Berechnung des Mittelwerts war hingegen kein Problem.
- Es gab bei etlichen Gruppen Probleme im Umgang mit dem GTR. Einzelne Schüler einer Gruppe haben das gut hingekommen. Der Einsatz war zeitintensiv.

Es ist sinnvoll, die Schüler in der Experimentierphase die Augenzahl wechseln zu lassen. Im Plenum können diese fehlenden Vorstellungen thematisiert bzw. hinterfragt werden („Ist das wirklich so?“, „Muss man das so machen?“). Es muss herausgearbeitet werden, dass sowohl die Augenzahl als auch das Wechseln oder Nichtwechseln für die Modellierung der Realität unwichtig sind. Auch muss die Frage nach der relativen Häufigkeit auf lange Sicht gestellt werden und hiermit der Mittelwertbegriff und seine inhaltliche Bedeutung geklärt und thematisiert werden.

Wie auf dem Arbeitsblatt ersichtlich, wurden den Schülern Infoblätter zum Umgang mit dem CG20 und zum Simulieren eines mehrfachen Würfel experiments zur

Verfügung gestellt. Das ist auf jeden Fall notwendig gewesen. Diese Infoblätter beinhalteten eine schrittweise Anleitung mit Screenshots.

5. Anmerkungen

Das Würfelspiel Chuck-a-luck habe ich als einen guten Einstieg in die Wahrscheinlichkeitslehre für die Klassenstufe 7 empfunden. Es hat Anlass gegeben, um mit den Schülern über die Begriffe zu sprechen und die Modellierung anzugehen. Viele kannten das Spiel nicht und es war nicht so offensichtlich wie das Würfeln. Vielfach wird gefordert, der Wahrscheinlichkeitslehre den Anschein der Würfelbudenmathematik zu nehmen, aber dieses Glückspiel findet nun mal in Würfelbuden statt und es bietet sich daher an, es zu besprechen. Sinn war es nicht, die Schüler dahingehend zu „erziehen“ Würfelbuden oder Glücksspiele zu meiden bzw. zu unterlassen. Dieses Spiel eignet sich meiner Meinung nach sehr gut, um den Unterschied zwischen Theorie und Realität deutlich zu machen. Hierauf aufbauend war es kein großes Problem mehr auf mehrstufige Zufallsexperimente, Baumdiagramme und Pfadregeln einzugehen.

Auch in der Oberstufe konnte das Spiel Chuck-a-luck als Wiederholung in die Stochastik gute Dienste leisten. Vielfach waren auch hier Begriffe, Modellierungen und Verfahren unklar und konnten hiermit aufgefrischt werden. Andere Begriffe, wie etwa der Erwartungswert, konnten eingeführt werden.

Manuel García Mateos

Fachgebietsleiter Mathematik, Naturwissenschaften und Informatik

Landesinstitut für Pädagogik und Medien des Saarlandes